Valoración de opciones que dependen de varios factores

Carlos Moreno
Universidad Politécnica de Madrid

Resum

En la darrera dècada hi ha hagut una gran proliferació d'opcions financeres que depenen de diversos factors, tant entre les que es negocien en mercats com entre les OTC (*over-the-counter*). A més, empreses que han de prendre decisions sobre determinades inversions han desenvolupat opcions reals, particularment en l'àmbit dels recursos naturals o propietats immobiliàries, que es valoren d'una forma similar a les opcions financeres i que en molts casos depenen de diversos costos o beneficis. Els mètodes de valoració d'aquestes opcions requereixen un grau d'intensitat computacional més elevat, particularment quan són diversos els actius subjacents dels quals depèn l'opció financera o són diversos els preus o costos dels quals depèn l'opció real. La valoració d'opcions americanes encara és una qüestió difícil que requereix sofisticats procediments numèrics, perquè la posada en pràctica de les tècniques binomials i de diferències finites no resulta senzilla o no és eficient. No obstant això, la creixent capacitat dels ordinadors ha augmentat l'atractiu d'aquest tipus d'opcions. L'objectiu d'aquests comentaris és mostrar algunes d'aquestes dificultats, analitzant l'estructura matemàtica del problema i com poden ser resoltes tant en el camp de les opcions financeres com en el de les reals.

Resumen

En la última década ha habido una gran proliferación de opciones financieras que dependen de varios factores tanto entre las que se negocian en mercados como entre las OTC (*over-the-counter*). Además, empresas que deben tomar decisiones sobre determinadas inversiones han desarrollado opciones reales, particularmente en el ámbito de los recursos naturales o propiedades inmobiliarias, que se valoran de un modo similar a las opciones financieras y que en muchos casos dependen de varios costes o beneficios. Los métodos de valoración de estas opciones requieren un más alto grado de intensidad computacional, particularmente cuando son

varios los activos subyacentes de los que depende la opción financiera o son varios los precios o costes de los que depende la opción real. La valoración de opciones americanas es aún una cuestión difícil que requiere sofisticados procedimientos numéricos, debido a que la puesta en práctica de las técnicas binomiales y de diferencias finitas no resulta sencilla o no es eficiente. No obstante, la creciente capacidad de los ordenadores ha aumentado el atractivo de este tipo de opciones. El objetivo de estos comentarios es mostrar algunas de estas dificultades, analizando la estructura matemática del problema y cómo se pueden resolver tanto en el campo de las opciones financieras como reales.

1. Introducción

En las últimas décadas los mercados financieros han experimentado profundas innovaciones. Los modelos matemáticos en finanzas han producido una convergencia de ideas entre diferentes campos teóricos y aplicados de modo que actualmente existe una colaboración muy fuerte entre economistas, matemáticos y profesionales de las finanzas. No sólo es posible ver en las publicaciones científicas especializadas en finanzas una presencia fuerte de modelos matemáticos que son altamente sofisticados, sino que los propios mercados financieros hacen un uso real de estos instrumentos.

Junto a los tradicionales activos financieros como los bonos, obligaciones o las acciones, han aparecido activos que se derivan de ellos como son los futuros y las opciones. La estimación del precio de una opción y del tiempo óptimo para su ejercicio, puede realizarse usando algunos modelos matemáticos de los que el fundamental es el debido a F. Black y M. Scholes, que está descrito por los autores en un trabajo publicado en 1973. Los argumentos utilizados para la valoración de estos activos derivados van más allá del cómputo de valores medios y utilizan la hipótesis de que los mercados son competitivos y no permiten arbitrajes. Estos modelos se apoyan en ecuaciones en derivadas parciales parabólicas similares a las que se utilizan en modelos de procesos de difusión en física y en mecánica si bien los coeficientes de difusión resultan degenerados en los ejes dándole a la ecuación, características especiales. Además la libertad en el tiempo para ejercitar una opción, en las llamadas americanas, se traduce en que parte de la frontera del dominio donde se plantea la ecuación, sea libre. Es decir, que la región en la que se plantea la ecuación sea desconocida de antemano. Esta dificultad añadida asemeja aún más los modelos de las opciones con algunos problemas de la mecánica o de la térmica que se conocen con el nombre genérico de problemas unilaterales. La similitud es aprovechada para transferir técnicas y procedimientos que puedan ser utilizados en la resolución numérica de los modelos financieros.

A pesar de la famosa fórmula de Black-Scholes (1973) y Merton (1973), realmente la mayoría de los problemas de valoración de precios en finanzas no tienen una fórmula analítica que permita calcularlos. Aunque esto no es verdaderamente un problema en muchos casos ya que los métodos numéricos pueden ser muy eficientes, lo cierto es que progresivamente la complejidad de los modelos ha ido creciendo y el salto de los modelos unidimensionales a modelos que incluyen varias variables subyacentes o factores de riesgo múltiples ha creado nuevas dificultades en la valoración de las opciones.

2. El modelo básico de Black-Scholes-Merton

Una opción de compra (*call*) es un contrato entre dos partes de modo que el propietario de la opción tiene el derecho (pero no la obligación) de comprar el activo financiero a la otra parte antes de la fecha del vencimiento por una cantidad fijada llamada precio de ejercicio. Si tiene la capacidad para ejercitar la opción durante el plazo que va desde que se suscribe la opción hasta la fecha de vencimiento la opción se dice americana. Si la opción solamente se puede ejercitar en la fecha de vencimiento se dice europea. En el momento en que se suscribe la opción, el propietario paga una prima a la otra parte. A su vez el propietario puede vender su opción (o comprar nuevas) en un mercado de estas opciones. Si el propietario del contrato tiene el derecho y obligación de comprar o vender el activo financiero, el contrato se llama futuro. Mientras que el propietario de una opción de compra desea que el precio del activo aumente, el propietario de una opción de venta desea que disminuya. Podemos pensar que el valor de una opción de compra debe coincidir con el valor de una opción de venta ya que sus efectos son opuestos. Esto no es así ya que el contrato de una opción da el derecho, pero no la obligación, y la diferencia de valor entre ambas opciones es justamente el valor de un contrato en el que ambas partes estén obligadas, es decir, un futuro. El efecto de estos derivados financieros es lo que los economistas llaman la intermediación financiera, es decir, la transferencia de riesgo financiero de unos individuos a otros.

Las valoraciones más simples de opciones de compra o de venta están basadas en las siguientes hipótesis sobre el funcionamiento del mercado:

1) *Mercado sin fricción.* No existen costes transaccionales ni tasas en el mercado.
2) *Mercado sin arbitrajes.* Todas las inversiones sin riesgo deben tener el mismo rendimiento representado por r.
3) *Mercado continuo.* Se pueden comprar o vender continuamente un número, que no es necesariamente entero, de activos financieros.
4) *Mercado con dividendo continuo.* Por el activo subyacente se paga un dividendo por unidad de tiempo δ, pero no se produce ninguna otra alteración objetiva que pueda modificar bruscamente el valor del activo.
5) *Modelo Browniano del comportamiento del valor del activo.* Se admite que S sea un proceso aleatorio que verifique la ecuación diferencial estocástica

$$dS = (\mu - \delta)Sdt + \sigma SdX$$

siendo X un proceso Browniano de incrementos con media nula y desviación típica $\sqrt{dt}$.

6) *Mercado con posiciones en corto y en largo*. El mercado permite vender en corto, es decir, vender activos que no se poseen con la garantía de reintegrarlos en el vencimiento.

Evidentemente, en la fecha de vencimiento el valor exacto de la opción es conocido y viene dado por el llamado contrato de liquidación (*payoff*), que en el caso de los modelos de opciones más sencillas se reduce a una expresión numérica en la que interviene el valor del activo y el precio de ejercicio. Así, para una opción simple de compra o de venta, las liquidaciones vienen dadas respectivamente por las funciones

$$F(S_T) = \text{máx}\,(S_T - K, 0), \qquad F(S_T) = \text{máx}\,(K - S_T\,, 0)$$

donde S_T representa el precio del activo en el instante T y K el precio de ejercicio. Si se admite que en todo instante sigue existiendo una dependencia funcional entre el proceso del activo subyacente y el precio de la opción y que viene dada por una función $V = V(S, t)$, que es regular, entonces mediante un argumento basado en las anteriores hipótesis es posible concluir que el precio de la opción para un valor arbitrario S verifica la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - \delta) S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0\ ,$$

que se conoce como ecuación de Black-Scholes. La solución de esta ecuación, que determina la relación entre los precios de la opción y el subyacente, debe verificar la condición final $V(S, T) = F(S)$ para todo valor posible de S.

En el caso general de una ecuación parabólica, es preciso completar la ecuación con condiciones de contorno además de la condición final ya mencionada. Sin embargo, el hecho de que los coeficientes se anulen en 0, le confiere a la ecuación una estructura especial. En efecto, la ecuación degenera en $S = 0$ reduciéndose a una ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{\partial V}{\partial t} - rV = 0$$

cuya solución explícita es

$$V(0, t) = V(0, T)e^{r(t-T)} = F(0)e^{r(t-T)}\ .$$

Así, para el caso de una opción de compra $V(0, t) = 0$ y para una opción de venta $V(0, T) = Ke^{r(t-T)}$, lo que ocurre cuando el valor del activo subyacente es nulo es algo irrelevante desde un punto de vista financiero. Pero es importante señalar que también lo es desde el punto de vista numérico y aunque aparece frecuentemente como una condición de contorno realmente no es capaz de introducir información en la ecuación en derivadas parciales. Se podría justificar que la situación es similar para $S \to \infty$ ya que existe una condición de contorno embebida en la ecuación. Sin embargo, existe un problema adicional cuando se pretende usar un método numérico y se está obligado a realizar lo que con frecuencia se llama localización, limitando el dominio infinito de la ecuación a un intervalo acotado $0 < S < L$. En este caso, sí es preciso imponer una condición de contorno como la siguiente

$$V(L,\ t) = F(L)e^{r(T-t)}\ .$$

Así pues, las ecuaciones en derivadas parciales que aparecen en la valoración de opciones

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mathscr{L} V = 0$$

con

$$\mathscr{L} V = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-\delta)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV$$

tienen una característica que las diferencia de las ecuaciones parabólicas clásicas, que reside en que los coeficientes de las derivadas se anulan en $S = 0$. Desde un punto de vista teórico, resulta interesante formular los problemas pasando a una escala logarítmica en la variable independiente que tiene el efecto de hacer desaparecer la degeneración de los coeficientes a cambio de extender el dominio para el precio del activo a toda la recta. Sin embargo, el uso de la escala logarítmica hace necesaria la introducción de fronteras artificiales para precios pequeños cuando se procede a resolver numéricamente el problema y los dominios no-acotados se aproximan por dominios acotados. Por esta razón, estas transformaciones parecen tener sólo un interés teórico.

Argumentos basados en la ausencia de arbitrajes permiten justificar que las relaciones que rigen el precio de las opciones americanas son las siguientes

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mathscr{L} V \leq 0\ ,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mathscr{L} V\right)(V - F(S)) = 0, \qquad V - F(S) \geq 0\ .$$

En los puntos $(S,\ t)$ en los que el valor de la opción es superior al de liquidación se verifica el equilibrio Black-Scholes en ambos sentidos, es decir se verifica la ecuación. En el caso de las opciones de venta europeas se puede probar directamente que la solución no es inferior al valor de liquidación en todos los puntos, por lo que no existe diferencia entre el precio de una opción europea y americana si $\delta = 0$. Por el contrario, en el caso de una opción de venta, la europea está en una región del plano por debajo del valor de liquidación y consecuentemente difiere de la americana.

El valor de una opción de venta americana es la suma del valor de liquidación más una valoración de la capacidad de descender del precio del activo. Obviamente, existe un entorno de $S = 0$ en el que esa valoración es nula y por lo tanto el propietario debería ejercitar su opción. En una opción de venta europea, las funciones $P(S, t)$ y $(K - S)^+$ se entrecruzan para cada t fijo. La solución de la opción europea está por debajo de la liquidación para valores de $S < K$ alejados de K, mientras que para valores por encima de K el valor de la opción europea supera al de liquidación. Además, los precios de las opciones americanas verifican la siguiente propiedad de contacto, que pueden justificarse mediante argumentos de ausencia de arbitrajes: La función $\frac{\partial V}{\partial S}$ (delta) toma el valor -1 en los puntos de la frontera libre $S = S_f(t)$.

3. Representación probabilística de la valoración de opciones

La ecuación en derivadas parciales puede ser transformada mediante adecuados cambios de variable en la ecuación de la difusión lineal o ecuación del calor que aparece en los modelos que describen numerosos fenómenos en mecánica y en física y su solución puede ser expresada analíticamente. Una expresión directa de la solución en el caso de una opción europea es

$$V(S,t) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} \int_{-\infty}^{\infty} F(Se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+z}) e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2(T-t)}} dz$$

en el caso $\delta = 0$ (véase Wilmott *et al.* (1993), Almagreen (1998)). A esta expresión se le puede dar una interpretación probabilística. Puesto que la densidad de la distribución normal de media 0 y varianza $\sigma^2(T - t)$ es

$$\Phi(x,0,\sigma^2(T-t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} e^{-\frac{-x^2}{2\sigma^2(T-t)}}$$

y es la asignada al incremento $\sigma(X(T) - X(t))$ de acuerdo con la definición de proceso Browniano. Consecuentemente se puede interpretar el valor de la opción como

$$V(S,t) = e^{-r(T-t)} E(F(Se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma(X(T)-X(t))}))$$

donde E representa la esperanza asociada a la probabilidad. Pero

$$\hat{S}(t) = S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma X(t)}$$

es la solución de la ecuación diferencial estocástica

$$dS = rSdt + \sigma SdX\,,$$

que coincide con la de nuestro modelo, pero con distinta tendencia (proceso de pseudoprecios). Así pues, se tiene que

$$\hat{S}(T) = \hat{S}(t) e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma(X(T)-X(t))}\,.$$

En definitiva, el valor de la opción está dado por

$$V(S,t) = e^{-r(T-t)} E(F(\hat{S}(T)))$$

donde $\hat{S}$ es un proceso log-normal con la misma volatilidad que el de nuestro modelo, pero con la misma tendencia de un proceso sin riesgo (*risk-neutral*). Para una opción de venta se puede obtener una fórmula similar usando la fórmula de la paridad *put-call*.

En lo que se refiere a las opciones americanas, Bensoussan (1984), (1978) y Karatzas (1988) establecieron la conexión entre la formulación como problema unilateral o inecuación variacional y los problemas de parada óptima. Así, los problemas de valoración de opciones americanas admiten una formulación probabilística alternativa como

$$V(S,t) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} E(e^{-r(\tau-t)} F(\hat{S}(\tau))) \tag{1}$$

donde $\mathcal{T}$ representa el conjunto de tiempos de parada con valores en $[t, T]$ para la filtración aumentada F_t asociada al movimiento Browniano.

4. Opciones que dependen de varios activos con riesgo

A pesar de los avances recientes, el problema de la valoración de opciones americanas, particularmente cuando depende de varios factores aleatorios, sigue siendo un problema complejo al menos desde un punto de vista numérico.

La intervención de varios factores con riesgo en el precio de la opción puede ocurrir de diversos modos, algunos de los cuales se indican a continuación

• *Opción de Margrabe* (1978) para intercambiar un activo por otro en una proporción fijada. Si S_1 y S_2 representan dos activos con riesgo, la opción da el derecho, pero no la obligación, de obtener q_1 acciones de primer activo a cambio de q_2 acciones del segundo activo. Consecuentemente el *payoff* de la opción es

$$F(S_1, S_2) = \text{máx}(q_1 S_1 - q_2 S_2, 0) .$$

Es importante señalar que la función de *payoff* es homogénea. Es decir

$$F(S_1, S_2) = S_2 F(\xi, 1), \quad \text{donde } \xi = \frac{S_1}{S_2}.$$

Por un argumento de similitud basado en la homogeneidad positiva de la función F se puede reducir la ecuación de Black-Scholes, correspondiente a este problema, a una ecuación similar en una sola variable independiente ξ (véase Wilmott (1998) para los detalles). Ésta no es una propiedad aislada de este tipo de contratos sino que está presente en muchos de ellos y permite una disminución en el número de variables independientes lo que siempre será muy ventajoso para resolver numéricamente el problema.

• *Opciones que dependen de activos financieros de características similares*. Se conocen como opciones cesta (*basket option*), opciones arcoiris (*rainbow option*), etc. En el caso de dos activos con riesgo S_1 y S_2, algunas de las funciones de *payoff* usadas en este tipo de contratos son

$$F(S_1, S_2) = \text{máx}(\text{mín}(S_1, S_2) - K, 0) \qquad \textit{on the worst.}$$
$$F(S_1, S_2) = \text{máx}(S_2 - S_1 - K, 0) \qquad \textit{spread call.}$$

La versión multidimensional de la ecuación de Black-Scholes toma la forma

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j S_i S_j \frac{\partial^2 V}{\partial S_i \partial S_j} + (r - \delta_i) S_i \frac{\partial V}{\partial S_i} - rV = 0 ,$$

donde ρ_{ij} representa la correlación entre los activos *i* y *j*, δ_i es el dividendo del activo *i* y σ_i la volatilidad del activo *i*.

5. La metodología de las opciones reales

Una opción nos permite hacer una pequeña inversión hoy con el fin de reducir el riesgo más adelante. También puede usarse para mantener abierta la posibilidad de hacer una inversión más tarde si las cosas van como esperamos. Se puede aplicar la metodología de las opciones financieras en relación con activos que no están directamente relacionados con los mercados de activos financieros, pero que están sujetos a incertidumbres. Se identifica una opción con un proyecto de inversión, explotación o cambio de uso. Si las cosas van por el camino adecuado se realiza el proyecto (lo que equivale a ejercitar la opción) mientras que en otro caso el proyecto no se realiza. Esta capacidad para realizar el proyecto tiene un valor que se puede estimar usando la misma metodología que se usa en las opciones financieras. Esta metodología ha sido usada en industrias relacionadas con la energía y los recursos naturales, propiedades inmobiliarias, farmacéuticas etc., en donde las inversiones conllevan un alto grado de incertidumbre. Su interés surge cuando se considera que las opciones de inversión de una empresa son una parte importante de su valor de mercado.

La idea de valorar opciones reales está presente en trabajos de Bellman, Howard o Manne en los años 60, antes de que el término *opciones reales* fuese acuñado. Naturalmente esta terminología aparece con el desarrollo de las opciones financieras. La metodología de las opciones reales intenta aplicar los mismos argumentos que en el caso de las financieras usando una supuesta capacidad para negociar en un mercado líquido con activos cuyo proceso de precios está muy relacionado con el proceso de precios del activo subyacente del proceso real.

Una situación a la que se puede utilizar esta metodología es la determinación del valor del cambio del uso que se hace de una propiedad. Por ejemplo, un terreno agrícola puede ser transformado en urbano, un edificio de viviendas puede ser rehabilitado para un uso comercial, etc. Para analizar cómo la metodología de las opciones reales se puede aplicar en estas circunstancias, se considera una propiedad para la cual las normativas legales vigentes permiten un cambio de uso en cualquier instante. La propiedad tiene un valor P_i para $i = 1,2$ para cada uno de sus usos. Se representa por F el coste del cambio de uso en la propiedad. La capacidad de decidir en qué momento se cambia el uso de la propiedad añade un valor al primer uso que se pierde en el momento del cambio. Se desea valorar esta capacidad y decir bajo qué circunstancias el cambio de uso es conveniente. Se considera que la opción para cambiar de uso es perpetua, pero una vez realizado el cambio de uso, éste es irreversible. Se puede encontrar una detallada exposición de este problema y otros análogos en Capozza, Li (1994), Childs *et al.* (s.d.), Gunnelin (2000).

Una hipótesis esencial en la construcción del modelo de valoración está en admitir que F y P_i son procesos estocásticos regidos por las ecuaciones

$$dF = \alpha_0 \, Fdt + \sigma_0 \, FdZ_0 \,,$$
$$dP_i = \alpha_i \, P_i dt + \sigma_i \, P_i dZ_i$$

donde α_i son las tasas de crecimiento esperadas de precios y gastos, σ_i son sus volatilidades y Z_i son procesos Brownianos estándares.[1] Los coeficientes de correlación entre estos procesos se designan por ρ_{0i} y ρ_{12}.

El uso de los argumentos de ausencia de arbitrajes, como en el caso de la opciones financieras, podría ser cuestionable en base a que los valores de la propiedad y los gastos no son activos que se puedan negociar de un modo líquido, lo que es fundamental en el argumento de Black-Scholes. Sin embargo, un argumento estándar en la metodología de las opciones reales es suponer que las variables de estado pueden ser replicadas por una cartera de activos financieros que se negocian en un mercado y se conocen como *spanning assets* o *surrogate assets*. De este modo, se relajan las hipótesis de liquidez necesarias para poder utilizar los argumentos clásicos de Black-Scholes y es posible establecer el equilibrio.

La tasa de crecimiento de un activo libre de riesgo se indica por r. El valor de la opción se expresa ahora mediante una función homogénea V que depende de las tres variables P_i y F. En Capozza, Li (1994); Gunnelin (2000), usando argumentos de ausencia de arbitrajes con las carteras que replican los procesos de precios y costes, se justifica que V verifica la siguiente ecuación en derivadas parciales[2]

$$\frac{1}{2}\sigma_0^2 F^2 \frac{\partial^2 V}{\partial F^2} + \frac{1}{2}\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j P_i P_j \frac{\partial^2 V}{\partial P_i \partial P_j} + \frac{1}{2}\rho_{0i}\,\sigma_0\,\sigma_i\,F P_i \frac{\partial^2 V}{\partial F \partial P_i} +$$

$$+(r-\delta_0)F\frac{\partial V}{\partial F} + (r-\delta_i)P_i\frac{\partial V}{\partial P_i} - rV = 0\,,$$

donde δ_0 y δ_i son los dividendos de las carteras que replican los procesos estocásticos.

Por otra parte, un propietario que se comporte racionalmente retrasará el cambio de uso mientras el valor del primer uso supere al valor del segundo uso más los costes de transformación. Más precisamente, el cambio de uso se producirá cuando el valor de la opción (que se pierde después de la transformación) más el valor del primer uso iguale a la suma del valor del segundo uso más el coste del cambio. Es importante notar que el equilibrio de Black-Scholes se verifica únicamente en la región

$$V(P_1,\, P_2,\, F) + P_1 > P_2 + F\,.$$

En esta región del espacio de precios y coste, es en la que se pretende resolver la ecuación en derivadas parciales. Desafortunadamente la región no es conocida *a priori* ya que la función V de valoración de la opción es precisamente la incógnita del problema. Se puede utilizar para salvar esta dificultad una técnica usada para resolver muchos de los llamados problemas de fron-

1. La conveniencia de estos modelos está analizada, por ejemplo, en McDonald, Siegel (1986).
2. Se usa la notación de índices mudos.

tera libre que aparecen en numerosas áreas aplicadas de la ciencia y la ingeniería, que consiste en convertir el dominio en uno fijo, extendiendo la función V artificialmente al resto del octante $\{F > 0,\ P_i > 0\}$ mediante la expresión

$$V(P_1,\ P_2,\ F) = P_2 - P_1 + F\ .$$

La frontera que limita las dos regiones se conoce como la superficie de indiferencia. Es usual admitir la continuidad de las *deltas* en la cobertura dinámica, lo que en este caso se traduce en

$$\frac{\partial V}{\partial P_1}(P_1,\ P_2,\ F) = -1\ ,$$

$$\frac{\partial V}{\partial P_2}(P_1,\ P_2,\ F) = 1\ ,$$

$$\frac{\partial V}{\partial F}(P_1,\ P_2,\ F) = 1\ .$$

El hecho de que la función sea homogénea permite efectuar una reducción de dimensión. Para ello se considera el cambio de variable

$$u(x_1,\ x_2) = V(x_1,\ 1,\ x_2), \qquad x_1 = \frac{P_1}{P_2}, \qquad x_2 = \frac{F}{P_2}\ .$$

De acuerdo con este cambio de variable, la ecuación en derivadas parciales se transforma en

$$a_{ij}x_i x_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + a_i x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u = 0$$

donde

$$a_0 = d_2 - r = -\delta_2\ , \qquad a_1 = d_1 - d_2 = \delta_2 - \delta_1\ , \qquad a_2 = d_0 - d_2 = \delta_2 - \delta_0\ ,$$

$$a_{11} = \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\,\sigma_2\ \rho_{12})\ , \qquad a_{22} = \frac{1}{2}(\sigma_0^2 + \sigma_2^2 - 2\,\sigma_0\ \sigma_2\ \rho_{02})\ ,$$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2}(\sigma_2^2 - \sigma_0\sigma_1\rho_{01} - \sigma_0\sigma_2\rho_{02} - \sigma_1\,\sigma_2\ \rho_{12})\ .$$

La condición que delimita el dominio variable del plano en el que se cumple la ecuación es

$$u(x_1,\ x_2) = 1 - x_1 - x_2\ .$$

Las condiciones de *contacto* en la frontera libre se convierten en

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_2} = -1 .$$

De nuevo se plantea la cuestión de si la ecuación debe completarse con condiciones de contorno. Se puede emplear el mismo tipo de argumentos que en las secciones anteriores en sentido negativo. Los ejes $x_2 = 0$ y $x_1 = 0$ son curvas características de la ecuación de segundo orden y consecuentemente la información de lo que ocurra en ellos no se mezcla con el equilibrio en el interior del primer cuadrante. Con el adecuado cambio de variable se podría razonar de modo similar con las condiciones en el infinito. No obstante, la necesidad de localización del dominio infinito en un dominio acotado en el que pueda ser resuelta la ecuación por un método numérico nos empuja a buscar una condición de contorno. Se puede justificar la condición de contorno por un simple argumento económico: volviendo a la ecuación original, obviamente, si el valor del primer uso o de los costes es muy grande frente al valor del segundo uso, el cambio no va a llevarse a cabo y el valor de la opción es nulo. Esto se puede traducir en las siguientes condiciones de contorno

$$V(P_1, P_2, F) = 0 \quad \text{cuando } \frac{P_1}{P_2} \to \infty \text{ ó } \frac{F}{P_2} \to \infty .$$

Las condiciones de contorno en el infinito para V se transforman en las siguientes:

$$u(x_1, x_2) = 0 \qquad \text{cuando } x_1 \to \infty \qquad \text{ó } x_2 \to \infty .$$

De este modo se puede localizar el problema de contorno en un dominio acotado $0 < x_1 \leq L_1$, $0 < x_2 \leq L_2$, imponiendo como condición $u = 0$ en $x_1 = L_1$ y en $x_2 = L_2$. Se puede justificar que con esta información es posible determinar una única solución de este problema de contorno localizado.[3]

Existe un cierto grado de confusión sobre si es necesario completar las condiciones de contorno añadiendo condiciones sobre los ejes $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$ entendiendo que en un problema elíptico la información debe rodear al dominio donde la ecuación se plantea. Efectivamente, el problema podría resolverse en cada uno de los ejes ya que la ecuación en derivadas parciales degenera en una ecuación ordinaria

3. En la práctica estas condiciones resultan ser demasiado radicales y obligan a que los valores de L_1 y L_2 sean muy altos. En Moreno, Samartin (2002) se consideran algunas condiciones de contorno alternativas que mejoran la precisión de la aproximación.

$$a_{11}\frac{d^2u}{dx_1^2}+a_1\frac{du}{dx_1}+a_0u=0$$

para la cual una solución explícita

$$u_1(x_1)=\begin{cases}1-x_1 & \text{si } x_1<x_1^*\\ \mathrm{k}x_1^{\beta} & \text{en otro caso}\end{cases}$$

con

$$x_1^*=\frac{\beta_1}{\beta_1-1},\qquad k=(1-x_1^*)(x_1^*)^{-\beta_1}$$

$$\beta_1=\frac{a_1-a_{11}-\sqrt{(a_1-a_{11})^2-4a_0a_{11}}}{2a_{11}}$$

puede ser establecida (la situación es similar en el otro eje). Sin embargo, como se ha indicado, esta información no puede ser incorporada al problema de contorno debido a la degeneración de la matriz de coeficientes en los ejes. Esto se pone de manifiesto también cuando se construye la formulación variacional del problema que rechaza la incorporación de estas condiciones de contorno. La formulación variacional suministra también la posibilidad de resolver el problema en un dominio fijo, ya que en principio una parte de la frontera (llamada frontera libre), que corresponde a la superficie de indiferencia en el modelo tridimensional, es desconocida *a priori*.

Otra orientación, que tampoco parece conveniente, es realizar el cambio de variable definido por $x_i = e^{-yi}$ que permite transformar la ecuación en una de coeficientes constantes en la escala logarítmica. Sin duda, el hecho de que la matriz de coeficientes fuese en este caso definida positiva y constante facilitaría considerablemente los cálculos pero, no obstante, la contrapartida está en que el nuevo dominio sería todo el plano y una nueva localización (esta vez en los precios bajos) sería necesaria. Además, podrían aparecer problemas de *overflow* al retornar a las variables originales.

6. Métodos numéricos

En el caso de las opciones europeas se puede construir analíticamente la solución del problema de la valoración de una opción *call* o *put*. No obstante, esto ya no parece posible en el caso de las opciones americanas ya que el problema no es lineal. Además, los refinamientos que se puedan introducir en el modelo posiblemente tales como términos de tendencia, que no son lineales, pueden hacer impracticables los métodos analíticos. Por otra parte, la solución analítica incluye la evaluación de la función de distribución normal en dos valores, lo que requiere una aproximación que puede generar un error mayor que el que se produce en un método numérico.

A pesar de los continuos avances en las dos últimas décadas, el desarrollo de métodos numéricos de valoración de opciones sigue siendo un problema al que se dedican muchos esfuerzos de investigación debido fundamentalmente a tres hechos:

— Refinamiento de los modelos que contemplan activos subyacentes que siguen procesos estocásticos más generales que el Browniano geométrico, tales como difusiones con salto (Merton, 1973; Cox-Ross, 1976), procesos no-markovianos (Heath, Jarrow y Morton, 1992) o semimartingalas generales (Horrison-Plisca, 1981).

— Aparición de cada vez más sofisticados modelos de opciones y su proliferación en ámbitos no-financieros (opciones reales).

— La complejidad computacional que se introduce en los modelos de opciones que contemplan la posibilidad de depender de varios activos subyacentes.

Las técnicas numéricas pueden dividirse en tres grupos:

— Métodos de Monte Carlo. Están basados en la simulación de trayectorias con números aleatorios o en las representaciones en términos de esperanzas tales como la de Feynman-Kac. Estos métodos requieren un más alto grado de intensidad computacional, pero la creciente capacidad de los ordenadores ha aumentado el atractivo de este tipo de procedimientos. En principio, su aplicación estaba limitada a las opciones europeas aunque es posible extenderla al caso multifactor. Una extensión basada en aproximaciones de mínimos cuadrados ha sido propuesta por Longstaff y Schwartz (2001).

— Métodos de retículos (*lattices*) o multinomiales. Están basados en las representaciones por grafos como las utilizadas por Cox y Rubinstein y que realmente pueden ser interpretados como métodos de diferencias finitas explícitos aplicados a las ecuaciones en derivadas parciales. Su aplicabilidad en el caso de varios factores es limitada. Además el carácter estacionario de las ecuaciones como la que corresponde a la valoración de cambio de uso de una propiedad, analizada en las secciones previas, y por consiguiente la ausencia de una condición final como la que que existe en los problemas dinámicos, hace difícil la utilización de este tipo de técnicas.

— Métodos de diferencias y elementos finitos. La ventaja de los métodos de elementos finitos está en su mayor versatilidad para el refinamiento adaptativo en las regiones en las que las deltas alcanzan valores altos. Se pueden obtener resultados más precisos que con otros métodos. Esto puede ser importante para determinar la curva de indiferencia que puede ser altamente sensible como se manifiesta en los ensayos numéricos. Una de sus desventajas es su relativa complejidad conceptual. Sin duda, para alguien que no dispone de una cierta familiaridad con la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales, le resultará mucho más simple la puesta en práctica de una simulación de Monte Carlo que la aproximación por elementos finitos, que requiere una comprensión de conceptos matemáticos como el de formulación variacional. Si el número de factores es superior a 3, su utilización es bastante problemática.

Se han planteado los problemas de valoración de opciones mediante ecuaciones en derivadas parciales, una condición inicial y restricciones unilaterales en el valor de la solución en el caso de las opciones americanas. Todas estas condiciones son relaciones puntuales, es decir, deben verificarse sobre cada punto. Hay un modo alternativo de formular el problema en el que las ecuaciones son de naturaleza global, es decir, implican conjuntamente a todos los valores de la función incógnita y sus derivadas en el dominio. Es la llamada formulación variacional. Una de las ventajas de esta formulación reside en que suministra la base teórica sobre la que se puede aplicar el método de los elementos finitos para la resolución numérica de un problema de contorno.

La dificultad esencial que introducen las opciones americanas frente a las europeas es la no-linealidad debida al *obstáculo* que supone la capacidad de ser ejercitada en cualquier instante antes del tiempo de vencimiento. De hecho, la utilización del método de los elementos finitos o diferencias finitas conduce el problema de la valoración de opciones americanas a un problema que se conoce en la teoría de la programación no-lineal como problema de complementariedad

$$Au \geq 0, \qquad u \geq w, \qquad Au(u - w) = 0 \, .$$

Actualmente existen algoritmos muy eficientes para resolver este tipo de problemas aunque en el caso de matrices mal condicionadas su convergencia puede ser lenta. Por otra parte, existen algoritmos especializados como el debido a Brennan y Schwartz que resuelven el problema en una variable eficazmente. En esta dirección, en Moreno, Samartin (2002) se propone un algoritmo válido para problemas de varias opciones que parece mucho más eficiente que otros métodos clásicos en la programación no-lineal.

Bibliografía

ALMGREN, R. (1998). *Course notes: Solving the Black-Scholes equation.* U. Chicago.

BENSOUSSAN, A. (1984). «On the theory of option pricing». *Act Appl. Math*, 2, p. 139-158.

BENSOUSSAN, A.; LIONS, J. L. (1978). *Applications des inequations variationelles en controle stochastique*. París: Dunod.

BERMÚDEZ, A.; MORENO, C. (1981). «Duality methods for solving variational inequalities». *Comp. Math. with Appl.*

CAPOZZA, D. R.; LI, Y. (1994). «The intensity and timing of investment: The case of land». *American Economics Review*, 84 (4), p. 889-904.

CHILDS, P. D.; RIDDIOUGH, T. J.; TRIANTIS, A. J. «Mixed uses and redevelopment option». *Real Estate Economics*, 24 (3), p. 317-339.

DIXIT, A. K.; PINDYCK, R. S. (1994). *Investement under uncertainty*. Princeton University Press.

GUNNELIN, A. (2000). «Real options in real estate». Estocolmo. [Tesis doctoral].

KARATZAS, I. (1988). «On the pricing of american options». *Appl. Math Optimization*, 17, p. 37-60.

LAMBERTON, D.; LAPEYRE, B. (1997). *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*. Ellipses.

LONGSTAFF, F. A.; SCHWARTZ, E. S. (2001). «Valuing American options by simulation: A simple least-squares approach». *The Review of Financial Studies*, vol. 14, núm. 1, p. 113-147.

MCDONALD, R.; SIEGEL, D. R. (1986). «The value of waiting to invest». *Quartely Journal of Economics*, 101 (4), p. 707-727.

MERTON, R. C. (1992). *Continuous-time finance*. Blackwell.

MORENO, C.; SAMARTIN, A. (2002). «Numerical methods for real option valuations». [Preimpresión]

WILMOTT, P. (1998). *Derivatives: The theory and practice of financial engineering*. J. Wiley-Sons.

WILMOTT, P.; DEWYNNE, J.; HOWISON, S. (1993), *Option pricing: Mathematical models and computation*. Oxford Financial Press.